Universidad Simón Bolívar.
Departamento de Electrónica y Circuitos.
EC1421 – Abril-Julio 2012. S2

**Taller4: Análisis de Señales Aleatorias**

1. **Suponga que *x(t)* y *v(t)* son dos procesos aleatorios (P.A) estacionarios en sentido amplio (WSS), con función de auto correlación $\boldsymbol{R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}}$ ; $\boldsymbol{R_{vv}(\tau) = e^{-3|\tau|}}$**

   a. **Usando *x(t)* y *v(t),* muestre como construiría un P.A g(t) cuya función de auto correlación $\boldsymbol{R_{gg}(\tau)}$ es: $\boldsymbol{R_{gg}(\tau) = R_{xx}(\tau)R_{vv}(\tau)}$.**

   Puede usar el siguiente par de transformada: $e^{-\beta|\tau|} \Leftrightarrow \frac{2\beta}{\beta^2+\omega^2}$

Asumiendo que los procesos son estadísticamente independientes planteamos que:

$$g(t) = x(t) \cdot v(t)$$
$$R_{gg}(\tau) = E[x(t+\tau)v(t+\tau)x(t)v(t)]$$
$$R_{gg}(\tau) = E[x(t+\tau)x(t)]E[v(t+\tau)v(t)]$$
$$R_{gg}(\tau) = R_{xx}(\tau)R_{vv}(\tau)$$

Con lo cual se demuestra que g(t) se puede construir como :

$$g(t) = x(t) \cdot v(t)$$

   b. ***w(t)* denota un P.A WSS con función de auto correlación $\boldsymbol{R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)}$. Suponga que *w(t)* es la entrada a un sistema causal, LIT de primer orden, cuya ecuación diferencial es: $\boldsymbol{\frac{dx(t)}{dt} + ax(t) = bw(t)}$, determine el valor de a y b para que la auto correlación de la salida *x(t)* sea $\boldsymbol{R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}}$.**

De la ecuación diferencial: $H(j\omega) = \frac{b}{a+j\omega}$
La transformada de Fourier de $R_{xx}(\tau) = 2e^{-|\tau|}$ es: $S_{xx}(j\omega) = \frac{4}{1+\omega^2}$
Sabemos que $S_{xx}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 \cdot S_{ww}(j\omega)$
Dado que $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau),\ S_{ww}(j\omega) = 1$
Por lo que: $S_{xx}(j\omega) = |H(j\omega)|^2$

$$\frac{4}{1+\omega^2} = \left|\frac{b}{a+j\omega}\right|^2$$
$$\frac{4}{1+\omega^2} = \frac{b^2}{a+\omega^2}$$

Por lo que $a = 1$ y $b = 2$

c. **Es posible tener un proceso estacionario en sentido amplio *z(t)* cuya función de auto correlación sea $R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{vv}(\tau)$, i.e., $R_{zz}(\tau)$ es el resultado de convolucionar $R_{xx}(\tau)$ $y$ $R_{vv}(\tau)$. Halle la respuesta en frecuencia del filtro *H(jω)* necesario para obtener el P.A WSS *z(t)* cuando la entrada al filtro *H(jω)* es *w(t)* ( $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)$ ).**

$$R_{zz}(\tau) = R_{xx}(\tau) * R_{vv}(\tau)$$
$$S_{zz}(\omega) = S_{xx}(\omega) \cdot S_{vv}(\omega)$$

A la salida del filtro se tiene: $S_{zz}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{ww}(\omega)$

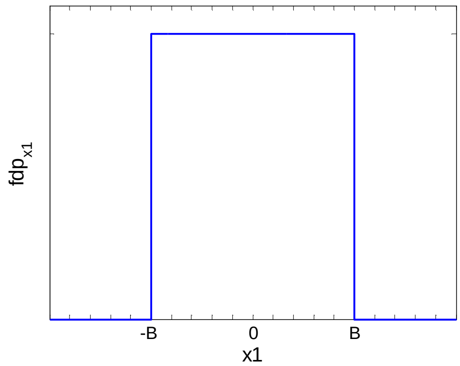
Dado que $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)$, $S_{ww}(j\omega) = 1$; $S_{zz}(j\omega) = |H(j\omega)|^2$

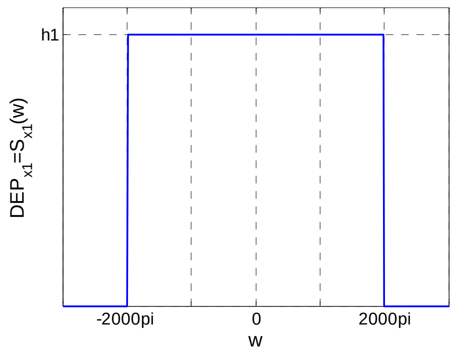
$$\frac{4}{1+\omega^2}\frac{6}{9+\omega^2} = |H(j\omega)|^2$$

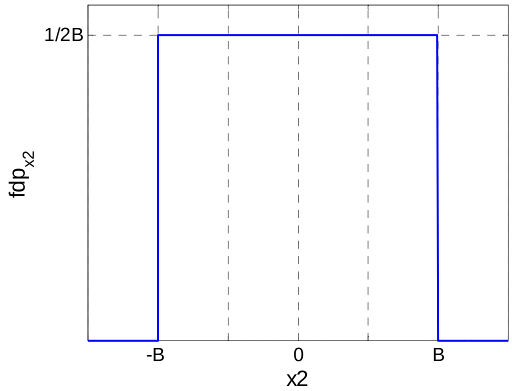
$$\frac{4}{(1+\omega^2)}\frac{6}{(9+\omega^2)} = H(j\omega)H(-j\omega)$$

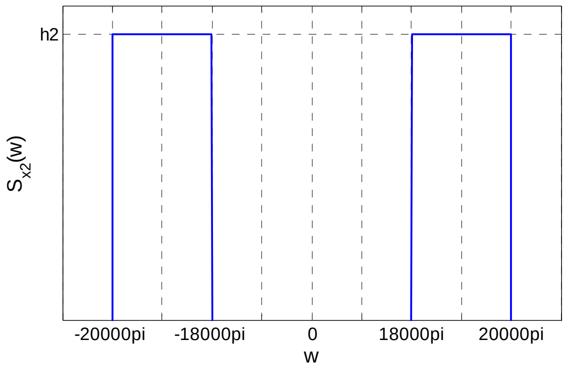
$$H(j\omega) = \frac{2\sqrt{3}}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$$

2. **Sea un proceso ergódico (PE) $x_1(t)$, uniformemente distribuido entre –B y B con una DEP constante para el rango de $-2000\pi < \omega < 2000\pi\ rad/seg$ . Sea el PE $x_2(t)$, independiente de $x_1(t)$, uniformemente distribuido entre –B y B y con DEP constante para el rango de $18000\pi < |\omega| < 20000\pi$ rad/seg.**






**Determine:**

a. **Obtenga B si se conoce que la potencia promedio total de $x_2$(t) es igual a 1 $\boldsymbol{Watt}$: $\boldsymbol{P_{promtotalX2} = 1Watt}$.**

Como el proceso es ergódico: $P_{promtotal} = E[{x_2}^2(t)] = 1$

$$\therefore\ P_{promtotalX2} = E[{x_2}^2(t)] = \ E[x_2(t)]^2 + {\sigma_{x2}}^2 = 1Watt$$

$$E[x_2(t)]^2 = 0$$

$$E[{x_2}^2(t)] = {\sigma_{x2}}^2 = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(2B)^2}{12}$$

$$B = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Con el valor de ${\sigma_{x2}}^2$ es posible obtener el valor de $h_2$ en la DEP de $x_2(t)$.

$$1 = 2\left[\frac{1}{2\pi}\int_{18000\pi}^{20000\pi} h_2 dw\right]$$

$$h_2 = 5 \times 10^{-4}$$

$$h_1 = 5 \times 10^{-4}$$

b. **Sea $\boldsymbol{y(t) = x_1(t) + x_2(t)}$, determine si es posible o no que y(t), este uniformemente distribuido entre -2B y 2B. Utilice la potencia como criterio de su análisis.**

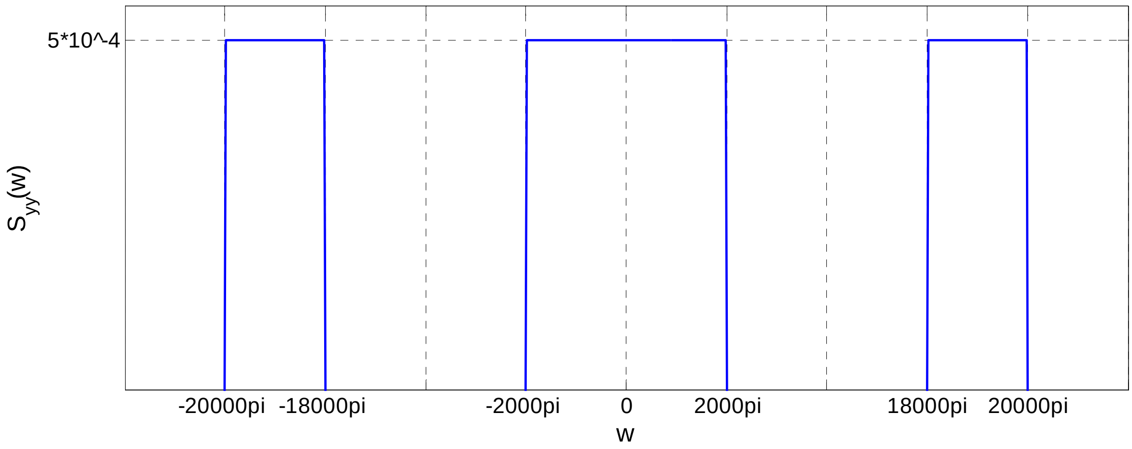
Calculemos la autocorrelación de $y(t)$

$$R_{yy}(\tau) = R_{x1x1}(\tau) + R_{x2x2}(\tau) + \cancel{E[x_1(t)]E[x_2(t)]} + \cancel{E[x_2(t)]E[x_1(t)]}$$

$$\therefore\ R_{yy}(\tau) = R_{x1x1}(\tau) + R_{x2x2}(\tau)$$

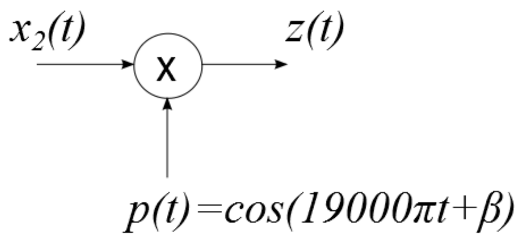
$$S_{yy}(w) = S_{x1x1}(w) + S_{x2x2}(w)$$

Grafiquemos $S_{yy}(w)$




$B = \sqrt{3}$ , La potencia total de $y(t) = 2$watts y este valor representara la varianza del proceso $y(t)$ ya que el promedio es cero. Si calculamos la varianza de una V.A. uniformemente distribuida entre $\mp 2B \neq 2$. Por lo que se concluye que no es posible qué y(t), este uniformemente distribuido entre -2B y 2B

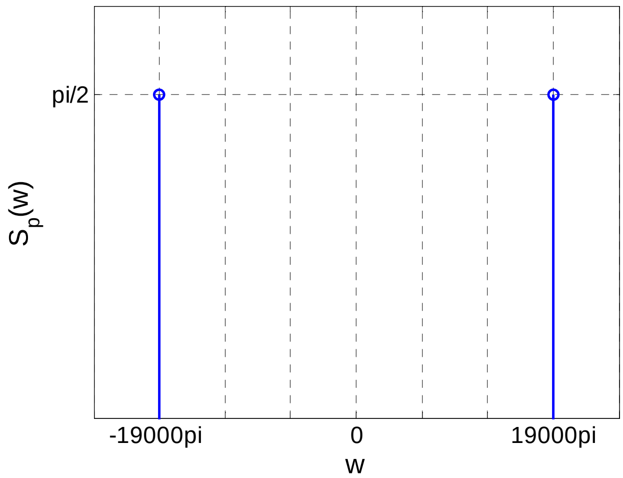
c. **Sea $z(t) = x_2(t)\cos(19000\pi t + \beta)$, con β uniformemente distribuido entre $[-\pi, \pi]$. Determine la expresión matemática de la DEP de z(t) y grafíquela detalladamente . Asuma que el PE sinusoidal es independiente de $x_2(t)$**



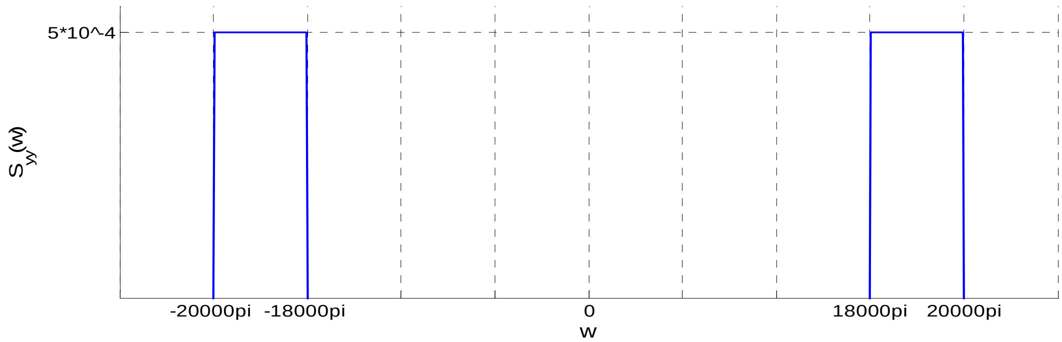

Se sabe que si $P(t)$ tiene una fdp uniforme entre $[-\pi, \pi]$:

$E[P(t)] = 0$, y $R_{pp}(\tau) = \frac{1}{2}\cos(19000\pi\tau)$ ∴

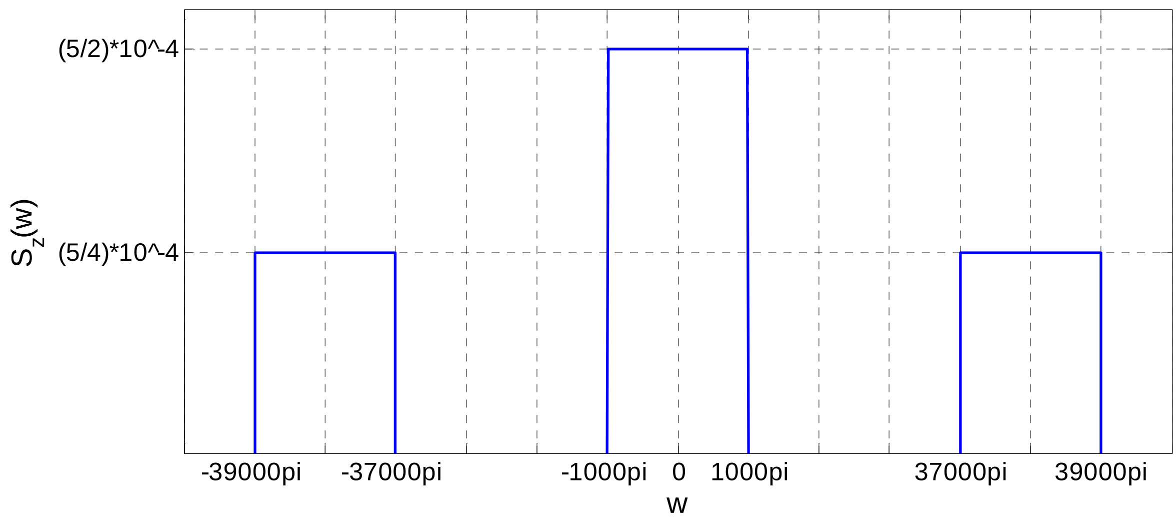
$$S_p(w) = \frac{\pi}{2}\delta(w - 19000\pi) + \frac{\pi}{2}\delta(w + 19000\pi)$$



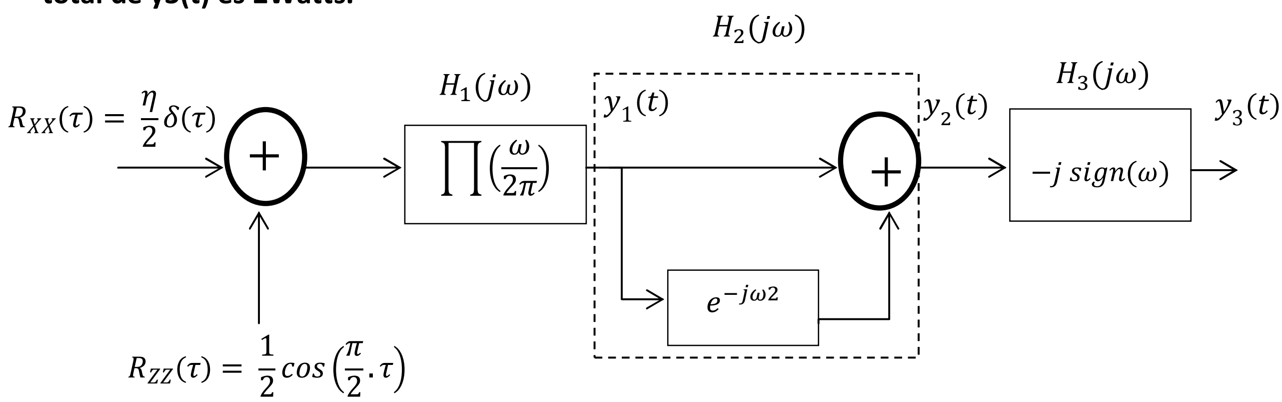

$$S_{x2}(w) = 5 \times 10^{-4} \Pi\left(\frac{w - 19000\pi}{2000\pi}\right) + 5 \times 10^{-4} \Pi\left(\frac{w + 19000\pi}{2000\pi}\right)$$




$$\begin{aligned} S_z(w) &= \frac{1}{2\pi} S_p(w) * S_{x2}(w) \\ &= \frac{5 \times 10^{-4}}{4}\left[\Pi\left(\frac{w - 38000\pi}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w}{2000\pi}\right) + \Pi\left(\frac{w + 38000\pi}{2000\pi}\right)\right] \end{aligned}$$




3. **Considere un sistema LIT, como el que se muestra a continuación, donde los procesos x(t) y z(t) son estacionarios en sentido amplio (WSS), no correlacionados y la potencia promedio total de y3(t) es 2Watts.**




**Determine:**

**a. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_1(t)$ en función de η .**

$$R_{yy}(\tau) = R_x(\tau) + R_z(\tau) + R_{xz}(\tau) + R_{zx}(\tau)$$

Se sabe que:

$$R_{xz}(\tau) = R_{zx}(\tau) = 0$$

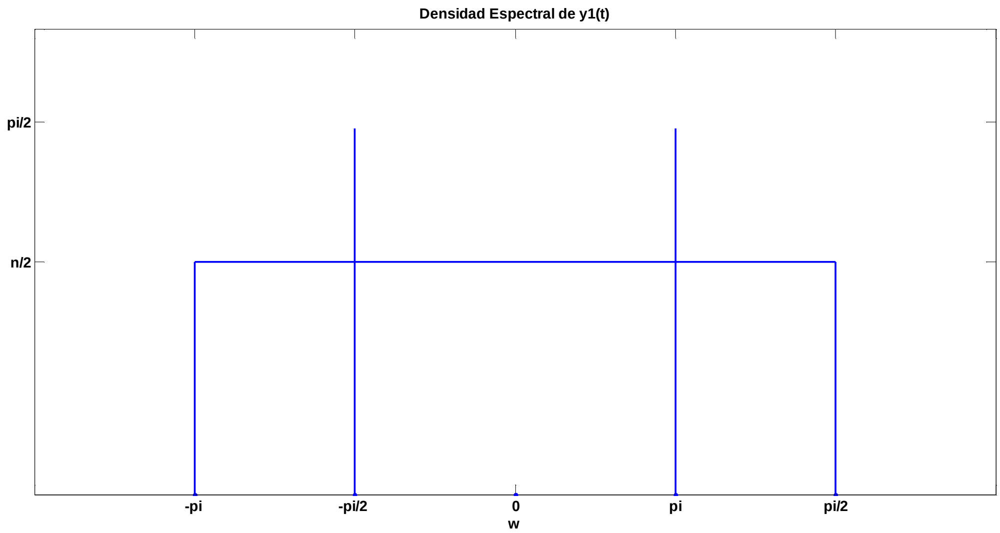
Luego:

$$R_{yy}(\tau) = R_x(\tau) + R_z(\tau)$$

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + S_z(\omega)$$

$$S_{y_1}(\omega) = S_y(\omega)|H_1(j\omega)|^2$$

$$S_{y_1}(\omega) = \frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) + \frac{\pi}{2}\delta\left(\omega - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\delta\left(\omega + \frac{\pi}{2}\right)$$




**b. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_2$(t) en función de η .**

$$H_2(j\omega) = 1 + e^{-2j\omega} = 1 + \cos(2\omega) - j\sin(2\omega)$$

$$|H_2(j\omega)|^2 = (1 + \cos(2\omega))^2 + \sin(2\omega)^2 = 1 + 2\cos(2\omega) + \cos^2(2\omega) + \sin^2(2\omega)$$

$$|H_2(j\omega)|^2 = 2 + 2\cos(2\omega) = 4\cos^2(\omega)$$

$$S_{y_2}(\omega) = S_{y_1}(\omega)|H_2(j\omega)|^2 = 4\cos^2(\omega)\frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\eta\cos^2(\omega)\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Graficar

**c. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_3(t)$ en función de η .**

$$H_3(j\omega) = -j\,\text{sing}(\omega)$$

$$|H_3(j\omega)|^2 = 1$$

$$S_{y_3}(\omega) = S_{y_2}(\omega)|H_3(j\omega)|^2 = S_{y_2}(\omega) = 4\cos^2(\omega)\frac{\eta}{2}\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = 2\eta\cos^2(\omega)\prod\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

Graficar

**d. Calcule el valor de η.**

Se conoce que la potencia promedio total de y3(t) es de 2 Watt:

$$P_{promedio_{total}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{y_3}(\omega)\,dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\eta\cos^2(\omega)\,dw$$

$$P_{promedio_{total}} = \frac{\eta}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(\omega)\,dw$$

$$2 = \frac{\eta}{\pi}\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[1+\cos(2\omega)]\,dw$$

$$\eta = 2$$

**e. Calcule la potencia promedio total de $y_1(t)$.**

$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{y_1}(\omega)\,dw$$

$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} 2\,dw + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega-\frac{\pi}{2}\right)dw + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\pi}{2}\delta\left(\omega+\frac{\pi}{2}\right)dw\right]$$

$$P_{y_1} = \frac{1}{2\pi}\left[4\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2\pi}[4\pi+\pi] = 2{,}5\,Watt$$

4. **Para el sistema mostrado en la figura (2), se le ha aplicado un ruido blanco Gausseano a la entrada del sistema , además se conoce que la fdp de primer orden de la señal y(t) tiene E[y(t)]=0 y $\sigma_y^2$=1, $\omega_c$=10π, A=1.**

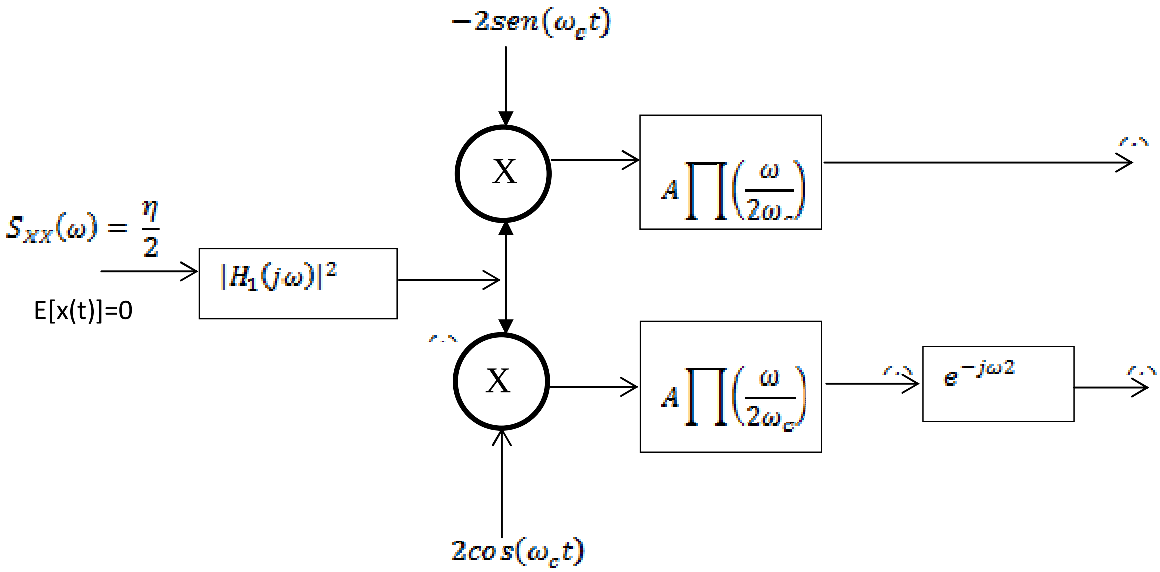



Figura 2.

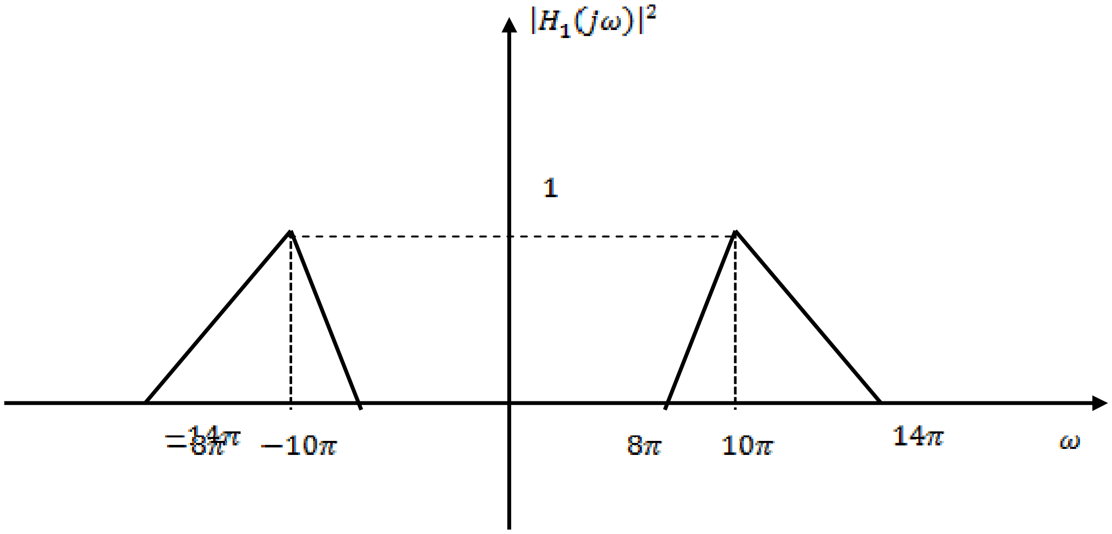



Figura 3.

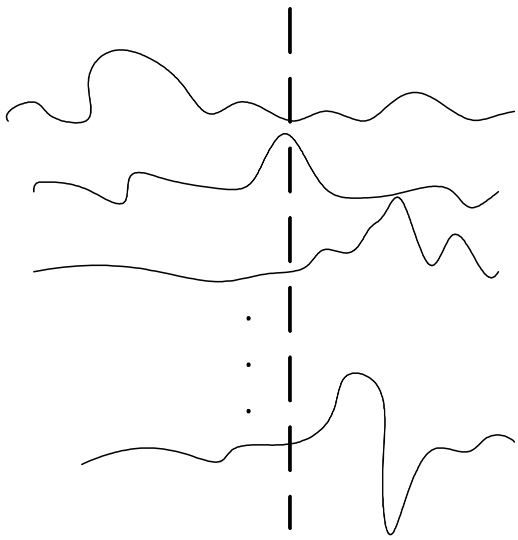
**Determine:**

a. Calcule el valor de η.
b. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_c(t)$.
c. Escriba la expresión matemática y grafique la densidad espectral de $y_2(t)$

d. Calcule la potencia AC de $y_c(t)$.
e. Determine el nivel DC de la envolvente de y(t).
f. Determine la función de Autocorrelación de $y_c(t)$

**5. Se define el proceso estocástico $\mathbf{x(t) = A - Bt}$ donde A y B son dos variables aleatorias Gausseanas de valor promedio igual a cero y desviación estándar $\boldsymbol{\sigma_A = \sigma_B = 0,5}$. Si se conoce que A y B son estadísticamente independientes, determine la probabilidad de que $\mathbf{x(t)}$ tome valores menores o igual a $\mathbf{0,3}$ para $\mathbf{t = 7seg}$. Analice si el proceso es WSS.**

$$x(t) = A - Bt$$



t=7seg

$P(x(t) \leq 0{,}3)|_{t=7}$

$$P(x(t) \leq 0{,}3) = 1 - P(x(t) > 0{,}3) = 1 - Q\left(\frac{0{,}3 - \mu_x}{\sigma_x}\right)$$

Debemos calcular el valor promedio en conjunto con la desviación estándar.

- $\mu_x = E[x(t)]$
  $\mu_x = E[A - Bt]$
  $\mu_x = E[A] - E[Bt]$
  $\mu_x = 0$

- ${\sigma_x}^2 = E[(x(t) - \mu_x)^2] = E[x(t)^2 - \cancel{{\mu_x}^2}]$
  ${\sigma_x}^2 = E[A^2] + E[B^2t^2] - 2E[ABt]$
  ${\sigma_x}^2 = {\sigma_A}^2 + {\sigma_B}^2t^2 - 2\cancel{E[A]E[Bt]}$

Nota: Con esto se cumple que la varianza es igual a la media estadística porque el promedio es igual a cero.

$$\sigma_x{}^2 = 0{,}5^2 + (1 + t^2)$$
$$\sigma_x{}^2 = 0{,}25^2 + (1 + 49) \text{ ; para t=7}$$
$$\sigma_x{}^2 = 12{,}5$$
$$\sigma_x = 3{,}54$$

$$P(x(t) \le 0{,}3) = 1 - Q\left(\frac{0{,}3}{3{,}54}\right) = 1 - Q(0{,}08485) \approx 1 - 0{,}4681$$
$$P(x(t) \le 0{,}3) = 0{,}5319$$

¿Es el proceso WSS?

- $E[x(t)] = 0$
- $E[x(t)x(t+\tau)] \rightarrow$ veamos si depende sólo de $\tau$

$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = E[(A - Bt)(A - B(t+\tau))]$$
$$R_{xx}(t, t+\tau) = E[A^2] - E[B^2 t(t+\tau)] - 2E[AB(2t+\tau)]$$
$$R_{xx}(t, t+\tau) = 0{,}5^2 - 0{,}5^2 t(t+\tau) - 0$$
$$R_{xx}(t, t+\tau) = 0{,}25 - 0{,}25t(t+\tau) - 0$$

El proceso NO es WSS!! La función de autocorrelación depende de $t$

6. **Sea $y(t)$ un proceso estocástico creado a partir de la modulación de una señal portadora por un proceso aleatorio $x(t)$, es decir que $y(t) = x(t)\cos(\omega_o t + \phi)$ donde $\phi$ es una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $0 - 2\pi$. Si se conoce que la variable aleatoria $\phi$ es estadísticamente independiente de $x(t)$, analice las circunstancias bajo las cuales $y(t)$ es WSS.**

Para que $y(t)$ sea WSS se debe cumplir:

1. $E[y(t)]$ debe ser una constante
2. $R_{y(t,t+\tau)} R_{y(\tau)}$ (La función de autocorrelación de $y(t)$ sólo debe depender de $\tau$)

$$E[y(t)] = E[x(t)\cos(\omega_o t + \phi)]$$

Como para este caso $x(t)$ y $\phi$ son estadísticamente independientes, el valor esperado del producto es igual al producto de los valores esperados:

$$E[y(t)] = E[x(t)]E[\cos(\omega_o t + \phi)]$$

Se sabe que:

$$E[\cos(\omega_o t + \phi)] = 0$$

Luego:

$$E[y(t)] = 0$$

Se cumple entonces la primera condición. El proceso es estacionario de orden 1.

Para verificar la segunda condición:

$$R_{y(t,t+\tau)} = E[y(t)y(t+\tau)]$$

$$R_{y(t,t+\tau)} = E[x(t)\cos(\omega_o t + \phi)\, x(t+\tau)\cos(\omega_o(t+\tau) + \phi)]$$

$$R_{y(t,t+\tau)} = E[x(t)x(t+\tau)\cos(\omega_o t + \phi)\cos(\omega_o(t+\tau) + \phi)]$$

$$R_{y(t,t+\tau)} = R_{x(t,t+\tau)}\frac{1}{2}\cos(\omega_o \tau)$$

Para que la función de autocorrelación de $y(t)$ dependa solamente de la variable temporal $\tau$, $R_{x(t,t+\tau)}$ debe depender sólo de $\tau$.

Es decir, que para que se cumpla la Estacionaridad de orden 2 (WSS) de $y(t)$, $x(t)$ debe ser WSS.